

多項式 $p(z)$ に対して

$$P(z) := \int_0^1 \frac{p(t)}{t-z} dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1])$$

と定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $P(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ で正則であることを示せ.

(2) 任意の実数 $x \in (0, 1)$ で極限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(x + i\epsilon),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(x - i\epsilon)$$

が存在することを示せ.

(3) さらに

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (P(x + i\epsilon) - P(x - i\epsilon)) = 2\pi i p(x)$$

が成り立つことを示せ.