(K,d) をコンパクト距離空間とし，$f:K\to K$ を写像とする．任意の異なる $x,y\in K$ に対し，f が

$$d(f(x),f(y))<d(x,y)$$

をみたすとき，f は唯一の不動点を持つことを示せ．

解答 1. $g:K\to[0,\infty]$ を $g(x)=d(x,f(x)$ と定める．

$$g(x)=d(x,f(x))\leq d(x,y)+d(y,f(y))+d(f(x),f(y))$$

より，任意の異なる $x,y\in K$ に対し

$$|g(x)-g(y)|\leq d(x,y)+d(f(x),f(y))<2d(x,y)$$

が成り立つ．従って g は連続である．K コンパクトより g は最小値を持つ．$x_0\in K$ で g が最小値をとるとする．$g(x_0)$ が 0 ならば x_0 が f の不動点である，$g(x_0)\neq 0$ のとき，$x_0\neq f(x_0)$ より

$$g(f(x_0))=d(f(x_0),f(f(x_0)))<d(x_0,f(x_0))=g(x_0)$$

より，x_0 で g が最小値をとることに反する．従って $g(x_0)=0$ で x_0 が f の不動点である．
次に唯一性を示す．異なる f の不動点 $x,y\in K$ が存在するとする．

$$d(x,y)\leq d(x,f(x))+d(f(x),f(y))+d(y,f(y))<d(x,y)$$

より矛盾．