放物線 $y = x^2\ (-1 \leq x \leq 1)$ の長さを求めよ．

解答 1. 放物線の長さを l とする．

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(2x)^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

とかける． $I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ とおく．

$$I = \left[x\sqrt{1+4x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \sqrt{5} - I + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

より

$$l = 2I = \sqrt{5} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

である．

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2}\left[\log(2x+\sqrt{1+4x^2})\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$$

より

$$l = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$$

である．