定数でない一変数複素多項式 $p(z)$ は必ず複素数根を持つことを示せ.

解答 1. p が複素平面上零点を持たないと仮定する．このとき $f(x) = \frac{1}{p(z)}$ は複素平面上正則である．p が $p(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$，$(c_n \neq 0)$ と表されるとする.

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^n \cdot |c_n + c_{n-1}z^{-1} + \cdots + c_0 z^{-n}|}$$

より，$|z| \to \infty$ で，$|f(z)| \to 0$ である．従って十分大きい $R > 0$ が存在し，$|z| > R$ ならば $|f(z)| < 1$ が成り立つ．また $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ はコンパクトより，$|f|$ は K で最大値をとる．従って f は複素平面で有界である．リュービルの定理から f は定数関数に限られる．逆数である p も定数関数に限られるが，これは仮定に矛盾する．従って p は少なくとも一つ複素平面上に根を持つ.