確率変数 X の確率密度関数が

$$f_X(x) = \frac{x+1}{2} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

で与えられているとする．この時，$Y = X^2$ の確率密度関数を求めよ．また Y の平均と分散を求めよ．

Y の累積密度関数は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(X^2 \le y) \\ &= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

と変形できる．これを y で微分することで，Y の確率密度関数がもとまる．$y > 0$ とする．

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$$

$y > 1$ では $f_X(\sqrt{y}), f_X(-\sqrt{y})$ は 0 となる．$y \le 1$ において

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} + \frac{1-\sqrt{y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

が成り立つ．従って Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & (0 < x \le 1) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

である．Y の期待値は

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} dy \\ &= \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である．また

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} dy \\
&= \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

従って分散は

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

である．